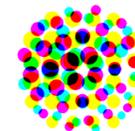


| | |
|---|-----------|
| TEMA 5: TANGENCIAS Y ENLACES. | 2 |
| 1 TRAZADO DE RECTAS TANGENTES A CIRCUNFERENCIAS | 3 |
| 1.1 Recta tangente a una circunferencia por un punto de ella. | 3 |
| 1.2 Recta tangente a una circunferencia por un punto exterior. | 3 |
| 1.3 Rectas tangentes exteriores a dos circunferencias de distinto radio dadas. | 4 |
| 1.4 Rectas tangentes interiores a dos circunferencias de distinto radio dadas. | 4 |
| 2 TRAZADO DE CIRCUNFERENCIAS TANGENTES CONOCIDO EL RADIO | 5 |
| 2.1 Circunferencias de radio conocido que pasen por dos puntos. | 5 |
| 2.2 Circunferencias de radio conocido tangentes a una recta en un punto de ella. | 5 |
| 2.3 Circunferencias de radio conocido que pasen por un punto exterior y sean tangentes a una recta. | 5 |
| 2.4 Circunferencias de radio conocido que sean tangentes a una circunferencia en un punto de ella. | 7 |
| 2.5 Circunferencias de radio conocido que pasen por un punto exterior y sean tangentes a una circunferencia. | 7 |
| 2.6 Circunferencias de radio conocido tangentes a dos rectas que se cortan. | 8 |
| 2.7 Circunferencias de radio conocido tangentes a una recta y a una circunferencia. | 8 |
| 2.8 Circunferencias de radio conocido tangentes a una recta y a una circunferencia tangentes entre sí. | 9 |
| 2.9 Circunferencias de radio conocido tangentes a una recta y a una circunferencia secantes entre sí. | 9 |
| 2.10 Circunferencias de radio conocido tangentes a dos circunferencias dadas. | 10 |
| 2.11 Circunferencias de radio conocido tangentes a dos circunferencias tangentes dadas. | 11 |
| 2.12 Circunferencias de radio conocido tangentes a dos circunferencias secantes dadas. | 11 |
| 3 ENLACES | 12 |
| 3.1 Enlazar dos rectas que se cortan mediante un arco de radio conocido | 12 |
| 3.2 Enlazar dos rectas que se cortan mediante un arco, conocido el punto de tangencia en una de ellas. | 12 |
| 3.3 Enlazar dos rectas paralelas mediante dos arcos de igual radio, conociendo los dos puntos de tangencia. | 13 |
| 3.4 Enlazar dos rectas cualesquiera por medio de dos arcos, conociendo el radio de uno de ellos y los puntos de tangencia | 13 |
| 3.5 Enlazar una recta y un arco mediante otro arco de radio conocido. | 14 |
| 3.6 Enlazar una recta y un arco mediante otro arco, conocido el punto de tangencia con la circunferencia. | 14 |
| 3.7 Enlazar una recta y un arco mediante otro arco, conocido el punto de tangencia con la recta. | 15 |
| 3.8 Enlazar varios puntos no alineados mediante arcos de circunferencia, conocido el radio de uno de los arcos. | 15 |

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

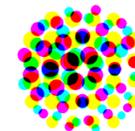
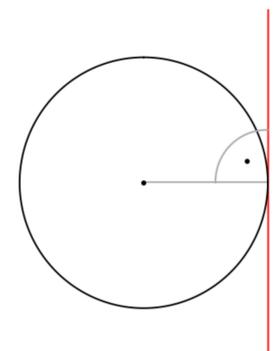
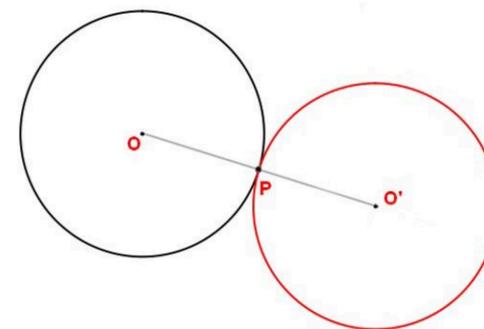
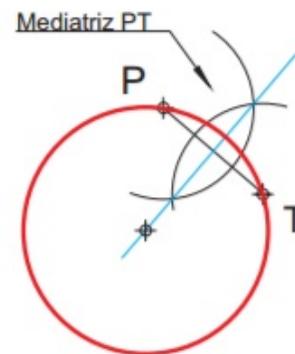
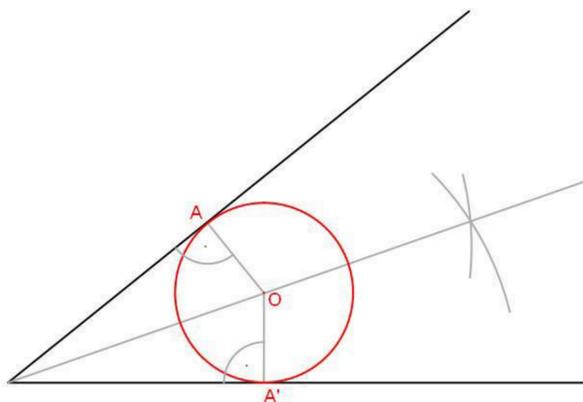
1.2. Dibujar curvas técnicas y figuras planas compuestas por circunferencias y líneas rectas, aplicando los conceptos fundamentales de tangencias, resaltando la forma final determinada e indicando gráficamente la construcción auxiliar utilizada, los puntos de enlace y la relación entre sus elementos.



TEMA 5: TANGENCIAS Y ENLACES.

Se dice que dos figuras son tangentes cuando tienen un solo punto en común, al que se conoce como punto de tangencia. La unión armónica entre curvas y rectas o de curvas entre sí se llama enlace y esta unión debe producirse por tangencia.

1. Si **dos** circunferencias son **tangentes**, el punto de tangencia se encuentra en la **recta** que une los **centros**.
2. Si una **recta** es **tangente** a una **circunferencia**, el radio en el punto de tangencia es **perpendicular** a la tangente.
3. El **centro** de cualquier circunferencia que pase por **dos puntos** está en la **mediatriz** del segmento. Todo radio perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales.
4. El **centro** de cualquier **circunferencia tangente** a dos rectas se encuentra en la **bisectriz** del ángulo que forman.



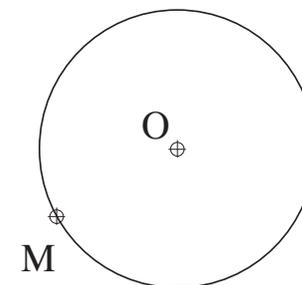
1 TRAZADO DE RECTAS TANGENTES A CIRCUNFERENCIAS

1.1 Recta tangente a una circunferencia por un punto de ella.

(Número de soluciones: 1.)

Dada la circunferencia de centro **O** y el punto **M**:

1. Se traza el radio **OM** correspondiente al punto dado.
2. Por el punto **M** se traza la recta **r** perpendicular al radio **OM**

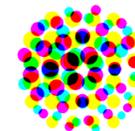
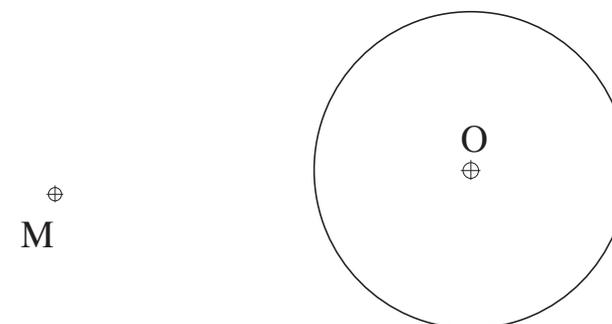


1.2 Recta tangente a una circunferencia por un punto exterior.

(Número de soluciones: 2.)

Dada la circunferencia de centro **O** y el punto **M**:

1. Se dibuja el segmento **OM** y se halla el punto medio **A** del mismo mediante el trazado de la mediatriz.
2. Con centro en el punto **A** y radio **AO = AM** se traza la circunferencia que corta a la dada en los puntos **B** y **C**, puntos de tangencia de las soluciones.
3. Se une el punto **M** con los puntos **B** y **C** mediante las rectas **r** y **s**.

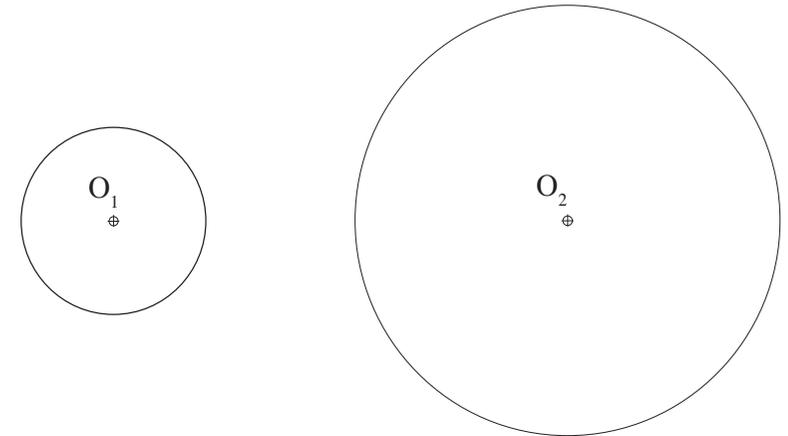


1.3 Rectas tangentes exteriores a dos circunferencias de distinto radio dadas.

(Número de soluciones: 2.)

Sean las circunferencias de centro O_1 y O_2 , y radios r_1 y r_2 , respectivamente:

1. Con centro en O_2 , centro de la circunferencia de mayor radio, se traza otra circunferencia cuyo radio valga $r_2 - r_1$.
2. Desde el centro O_1 se trazan las rectas m y n tangentes a la circunferencia anterior, de radio $r_2 - r_1$ (para ello, con centro en el punto medio A del segmento O_1O_2 , se dibuja un arco de radio AO_2 que corta a la circunferencia en los puntos B y C , que unidos con O_1 nos dan las tangentes m y n).
3. Las rectas que unen el punto O_2 con B y C se cortan con la circunferencia dato en los puntos T_1 y T_2 de tangencia. Los puntos de tangencia con la otra circunferencia se hallan trazando por O_1 las rectas paralelas a $O_2 T_1$ y a $O_2 T_2$ hasta cortar a la circunferencia en los puntos T_3 y T_4 .
4. Las rectas t_1 y t_2 que unen los puntos de tangencia $T_1 T_3$ y $T_2 T_4$ son la solución.

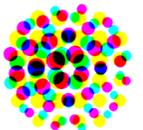
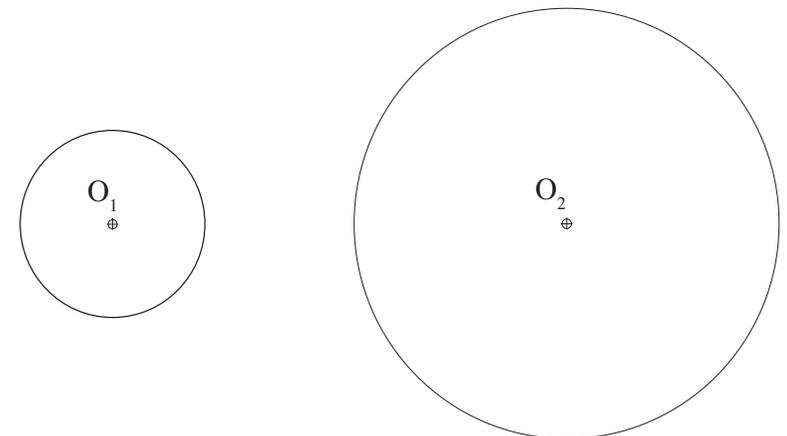


1.4 Rectas tangentes interiores a dos circunferencias de distinto radio dadas.

Número de soluciones: 2.)

Sean las circunferencias de centro O_1 y O_2 , y radios r_1 y r_2 , respectivamente:

1. Con centro en O_2 , centro de la circunferencia de mayor radio, se traza otra circunferencia cuyo radio valga $r_2 + r_1$.
2. Desde el centro O_1 se trazan las rectas m y n tangentes a la circunferencia anterior, de radio $r_2 + r_1$ (para ello, con centro en el punto medio A del segmento O_1O_2 , se dibuja un arco de radio AO_2 que corta a la circunferencia en los puntos B y C , que unidos con O_1 nos dan las tangentes m y n).
3. Las rectas que unen el punto O_2 con B y C se cortan con la circunferencia dato en los puntos T_1 y T_2 de tangencia. Los puntos de tangencia con la otra circunferencia se hallan trazando por O_1 las rectas paralelas a $O_2 T_1$ y a $O_2 T_2$ hasta cortar a la circunferencia en los puntos T_3 y T_4 .
4. Las rectas t_1 y t_2 que unen los puntos de tangencia $T_1 T_4$ y $T_2 T_3$ son la solución.



2 TRAZADO DE CIRCUNFERENCIAS TANGENTES CONOCIDO EL RADIO

2.1 Circunferencias de radio conocido que pasen por dos puntos.

Este no es un caso propiamente de tangencias; no obstante, se incluye aquí por seguir una cierta sistematización en el trazado de las mismas.

Dados los puntos **M** y **N**, Y el radio **R** de la circunferencia:

1. Con centro en el punto **M** y radio **R** se trazan dos arcos de circunferencia.
2. Con centro en **N** y radio **R** se trazan otros dos arcos de circunferencia que se cortan con los anteriores en los puntos **O**₁ y **O**₂, centros de las circunferencias solución.



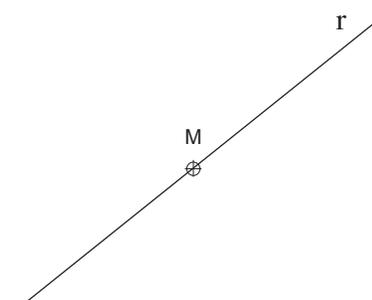
N
⊕

M
⊕

2.2 Circunferencias de radio conocido tangentes a una recta en un punto de ella.

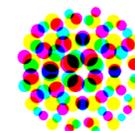
Sean la recta **r**, el punto **M** de ella y el radio **R** de la circunferencia:

1. Por el punto **M** se traza la perpendicular a la recta **r**.
2. Sobre la perpendicular, y a partir del punto **M**, se llevan en ambos sentidos las distancias **MO**₁ y **MO**₂ iguales al radio **R** dado.
3. Los puntos **O**₁ y **O**₂ son los centros de las soluciones y **M** el punto de tangencia común.

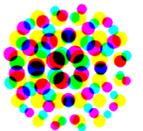
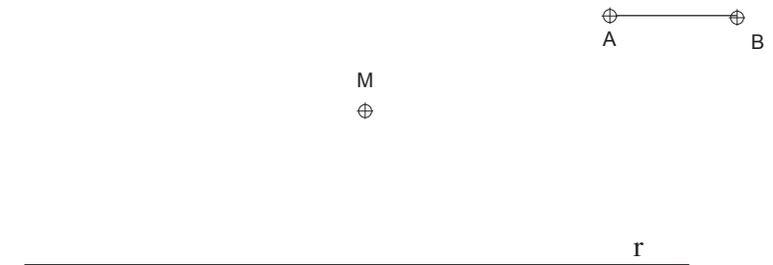


2.3 Circunferencias de radio conocido que pasen por un punto exterior y sean tangentes a una recta.

Sean la recta **r**, el punto **M** y el radio **R** de la circunferencia:



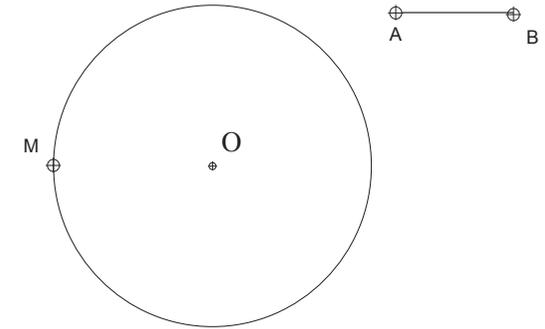
1. Por un punto **A** cualquiera de la recta **r** se traza la perpendicular a ésta y sobre ella se transporta un segmento **AB** igual al radio **R**; a continuación, por el punto **B** se traza la recta **m** paralela a **r**.
2. Con centro en el punto **M** y radio **R** se trazan dos arcos de circunferencia que cortan a la recta **m** en los puntos **O₁** y **O₂**, centros de las dos soluciones.
3. Por **O₁** y **O₂** se trazan las perpendiculares a la recta **r**, obteniendo los puntos **T₁** y **T₂** de tangencia.



2.4 Circunferencias de radio conocido que sean tangentes a una circunferencia en un punto de ella.

Sean la circunferencia de centro O , el punto M de ella y el radio R de las soluciones:

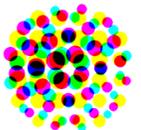
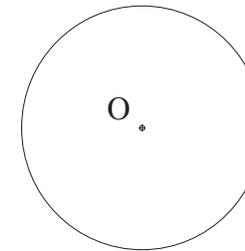
1. Se une el centro O con el punto M .
2. Sobre la recta anterior y a partir del punto M se lleva en ambos sentidos las distancias MO_1 y MO_2 iguales al radio R dado.
3. Los puntos O_1 y O_2 son los centros de las soluciones y M el punto de tangencia común.



2.5 Circunferencias de radio conocido que pasen por un punto exterior y sean tangentes a una circunferencia.

Sean la circunferencia de centro O , el punto M y el radio R de las circunferencias solución:

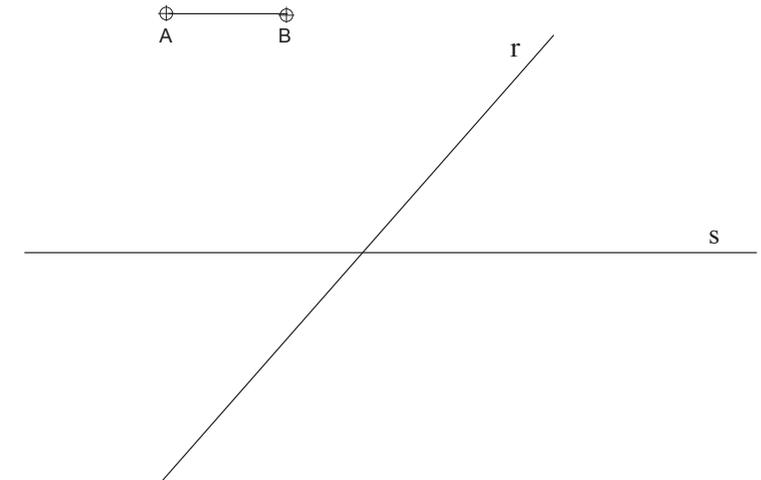
1. A partir del centro O se traza una recta cualquiera y sobre ella se transporta el segmento $OA = R$; en dicha recta se determinan también los puntos B y C de forma que $AB = AC = R'$, siendo R' el radio de la circunferencia dada de centro O .
2. Con centro en O y radios $OB = R + R'$ y $OC = R - R'$ se trazan sendas circunferencias.
3. Con centro en el punto M y radio R se traza la circunferencia que corta a las anteriores en los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4 , centros de las circunferencias solución.
4. Los puntos de intersección de la circunferencia dada con los segmentos OO_1, OO_2, OO_3 y OO_4 determinan los puntos T_1, T_2, T_3 y T_4 de tangencia.



2.6 Circunferencias de radio conocido tangentes a dos rectas que se cortan.

Sean las rectas r y s , y el radio R :

1. Se trazan dos rectas m y n , paralelas a r , a una distancia R y otras dos rectas p y q , paralelas a s , a una misma distancia R .
2. Donde las cuatro rectas m , n , p y q se cortan se obtienen los centros O_1 , O_2 , O_3 y O_4 de las soluciones.
3. Los puntos de tangencia T_1 , T_2 , T_3 , etc., se hallan trazando por los centros O_1 , O_2 , O_3 y O_4 las perpendiculares a las rectas r y s .

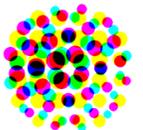
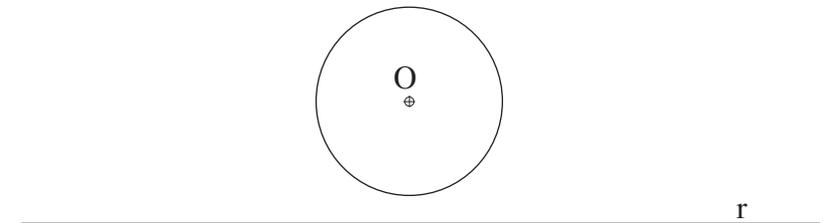


2.7 Circunferencias de radio conocido tangentes a una recta y a una circunferencia.

Dadas la recta r , la circunferencia de centro O y el radio R :

En estos ejercicios se trata de buscar las intersecciones de los lugares geométricos de los centros de las circunferencias que cumplen la condición que nos piden. Si son circunferencias se dibujan las circunferencias concéntricas a la que nos dan y de radio la suma y la diferencia con el que nos dan. Si son rectas trazando paralelas a una distancia R de la recta a la que tiene que ser tangente.

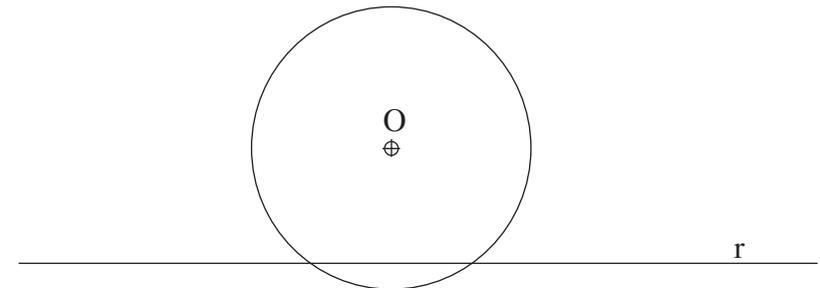
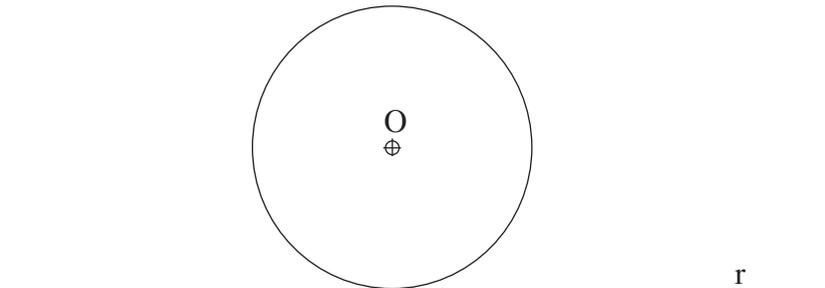
1. A partir del centro O se traza una recta cualquiera y sobre ella se transporta el segmento $OA = R$; en dicha recta se determinan también los puntos B y C de forma que $AB = AC = R'$, siendo R' el radio de la circunferencia dada de centro O .
2. Con centro en O y radios $OB = R + R'$ y $OC = R - R'$ se trazan sendas circunferencias.
3. Por un punto M de r se traza una perpendicular a esta; sobre ella se transporta un segmento $MN = R$ y por N se traza una recta s paralela a r .
4. La recta s corta a las circunferencias anteriores en los puntos O_1 , O_2 , O_3 y O_4 ,
5. Los puntos de tangencia T_1 , T_2 , T_3 y T_4 con la circunferencia se hallan uniendo los puntos O_1 , O_2 , O_3 y O_4 con O , y los puntos de tangencia T_5 , T_6 , T_7 y T_8 con la recta r , trazando las perpendiculares a esta desde los centros anteriores.



2.8 Circunferencias de radio conocido tangentes a una recta y a una circunferencia tangentes entre sí.

Dadas la recta r , la circunferencia de centro O y el radio R :

1. Se trazan dos circunferencias concéntricas a la que nos dan una sumándole el radio R a la circunferencia dato y otra restándolo.
2. Por un punto N cualquiera de la recta r se traza una perpendicular a ésta; sobre ella se transportan los segmentos $NC = ND = R$ y por los puntos C y D se trazan las rectas paralelas a r .
3. Las rectas paralelas cortan a las circunferencias anteriores (o son tangentes) en los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4 , centros de las circunferencias solución.
4. Los puntos de tangencia se determinan como en los casos anteriores.

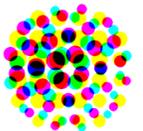


2.9 Circunferencias de radio conocido tangentes a una recta y a una circunferencia secantes entre sí.

Dadas la recta r , la circunferencia de centro O y el radio R :

Se sigue el mismo procedimiento que en los casos anteriores:

1. Circunferencias auxiliares sumando y restando el radio de la circunferencia que nos dan y el radio de las circunferencias solución.
2. Paralelas a r a una distancia R .
3. Determinar los puntos de intersección de estos lugares geométricos, que serán los centros de las circunferencias solución.
4. Determinar los puntos de tangencia, uniendo los centros para las circunferencias y trazando perpendiculares a la recta para los puntos de tangencia con esta.



2.10 Circunferencias de radio conocido tangentes a dos circunferencias dadas.

Dadas las circunferencias de centros O y O' y el radio R :

Como en los casos anteriores se tratará de buscar la intersección de los lugares geométricos, centros de circunferencia, que cumplen la condición de tangencia con las dos circunferencias dadas. Para este caso tendremos 8 soluciones posibles, veremos su resolución de dos en dos:

- TANGENTES EXTERIORES

Trazamos circunferencias auxiliares sumando el radio R al de las circunferencias que nos dan y determinamos los centros de las circunferencias solución en las intersecciones de estas circunferencias.

- TANGENTES INTERIORES

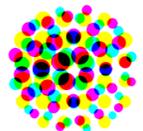
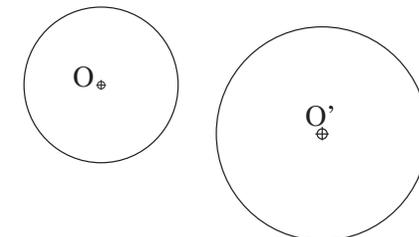
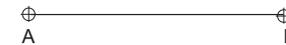
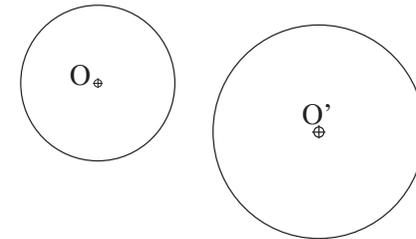
Se procede como en el ejercicio anterior, pero en esta ocasión restamos los radios.

- TANGENTE EXTERIOR-INTERIOR

Sumamos el radio R a la circunferencia de centro O y lo restamos a la de centro O' .

- TANGENTE INTERIOR-EXTERIOR

Restamos el radio R a la circunferencia de centro O y lo sumamos a la de centro O' .

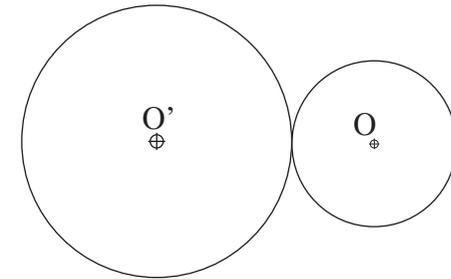


2.11 Circunferencias de radio conocido tangentes a dos circunferencias tangentes dadas.



Dadas las circunferencias de centro O y O' y el radio R :

1. Con centro en O y radio $OB = DA + R$ y con centro en O' y radio $O'D = O'C + R$ se trazan dos circunferencias.
2. Las dos circunferencias anteriores se cortan entre sí en los puntos $O1$ y $O2$ que, junto con los puntos $O3$ y $O4$ de intersección con la recta OO' , determinan los centros de las soluciones.
3. Los puntos de tangencia se determinan como en casos anteriores.

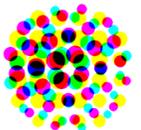
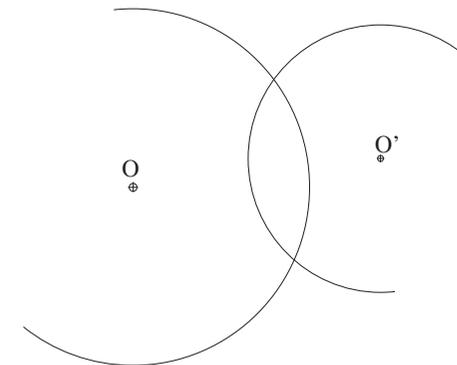


2.12 Circunferencias de radio conocido tangentes a dos circunferencias secantes dadas.



Dadas las circunferencias de centro O y O' Y el radio R :

1. Con centro en O y radios $OB = DA + R$ y $OC = DA - R$ se trazan dos circunferencias.
2. Con centro en O' y radios $OE = OD + R$ y $OF = OD - R$ se dibujan otras dos circunferencias.
3. Las circunferencias anteriores se cortan en los puntos $O1, O2, \dots, O6$, centros de las soluciones.
4. Los puntos de tangencia se determinan, como en casos anteriores, uniendo centros.



3 ENLACES

Enlace es la unión armónica de dos o más líneas, curvas o rectas, de forma que parezcan una línea continua.

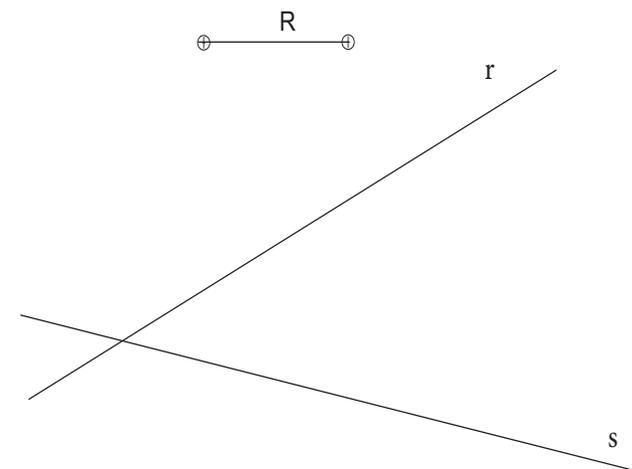
Para realizar un enlace debes seguir los siguientes pasos:

1. Resuelve el problema de tangencia, determinando los puntos de tangencia.
2. Dibuja el arco de enlace entre los puntos de tangencia de forma continua y uniforme.

3.1 Enlazar dos rectas que se cortan mediante un arco de radio conocido

Dadas dos rectas r y s y el radio R

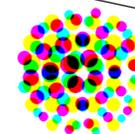
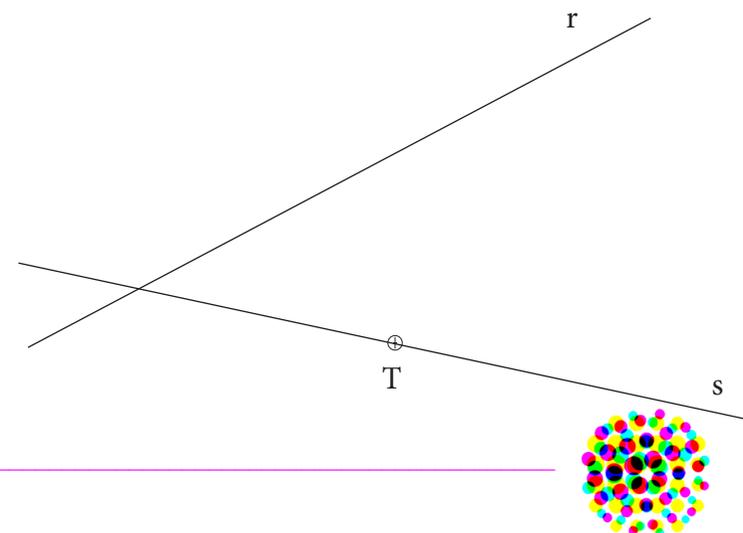
1. Se trazan las rectas m y n paralelas cada una de las dos dadas, a una distancia igual al radio R dado.
2. El punto O de intersección de las rectas m y n es el centro de la circunferencia tangente a las dos rectas dadas y por lo tanto el centro del arco que enlaza a las dos rectas.
3. Los puntos de enlace o tangencia estarán determinados por la perpendicular desde O a cada una de las rectas.



3.2 Enlazar dos rectas que se cortan mediante un arco, conocido el punto de tangencia en una de ellas.

Dadas las rectas r y s y el punto T .

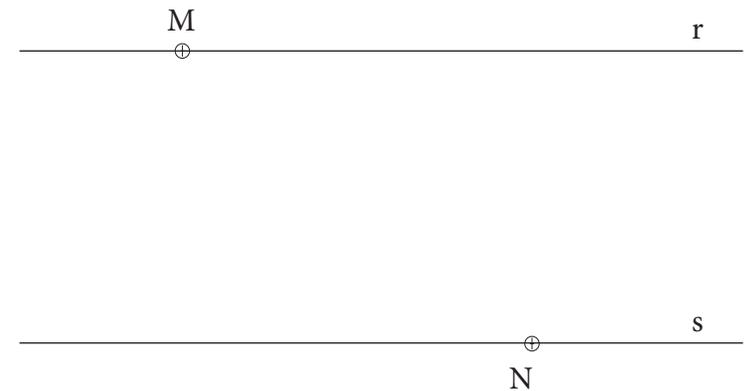
1. Trazar la bisectriz del ángulo que forman r y s .
2. Por el punto T se traza una perpendicular a la recta s .
3. El punto O de intersección de la perpendicular con la bisectriz será el centro de la circunferencia que enlaza las dos rectas.
4. Se traza una perpendicular a s desde O para determinar el punto de tangencia sobre esa recta.



3.3 Enlazar dos rectas paralelas mediante dos arcos de igual radio, conociendo los dos puntos de tangencia.

Dadas las rectas r y s , y los puntos M y N :

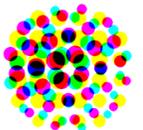
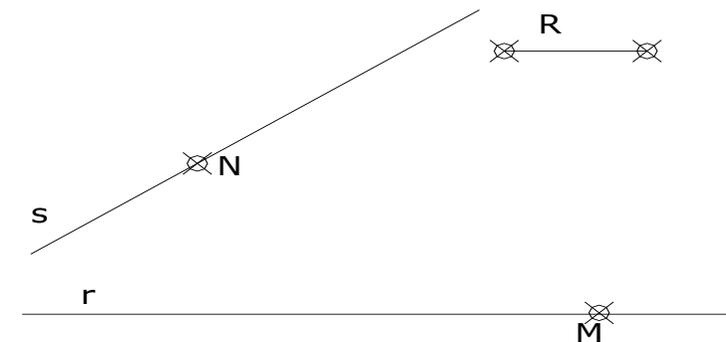
1. Los centros de los arcos estarán en las perpendiculares trazadas por los puntos M y N a las rectas r y s .
2. Se halla el punto medio A del segmento MN .
3. Se trazan las mediatrices de los segmentos AM y AN .
4. Donde las mediatrices se cortan con las perpendiculares trazadas por M y N están los puntos O_1 y O_2 , centros de los arcos solución, que son tangentes entre sí en el punto A .



3.4 Enlazar dos rectas cualesquiera por medio de dos arcos, conociendo el radio de uno de ellos y los puntos de tangencia

Dadas las rectas r y s , los puntos de tangencia M y N , y el radio R :

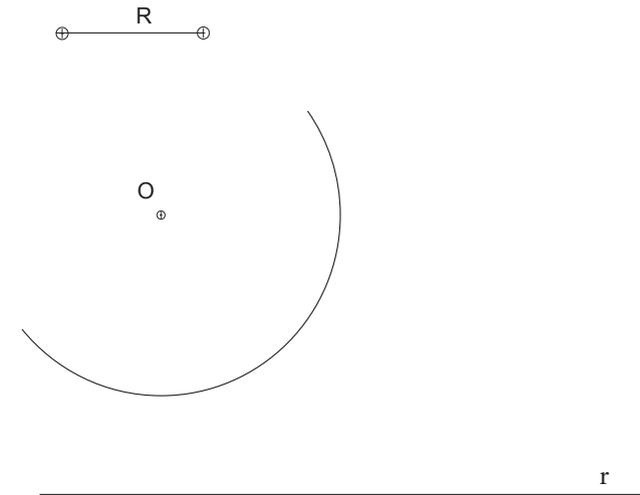
1. Por los puntos M y N se trazan perpendiculares a las rectas r y s , respectivamente.
2. Sobre la perpendicular a r se traslada, hacia el interior del ángulo, el segmento $MO_1 = R$, y sobre la perpendicular a s , hacia el exterior, el segmento $NA = R$. O_1 es el centro de uno de los arcos.
3. La mediatriz del segmento O_1A corta a la perpendicular a s en el punto O_2 , centro del segundo arco. El punto T de tangencia entre las dos circunferencias está en la recta O_1O_2 .



3.5 Enlazar una recta y un arco mediante otro arco de radio conocido.

Dados la recta r , la circunferencia de centro O y el radio R :

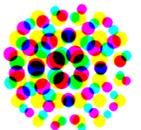
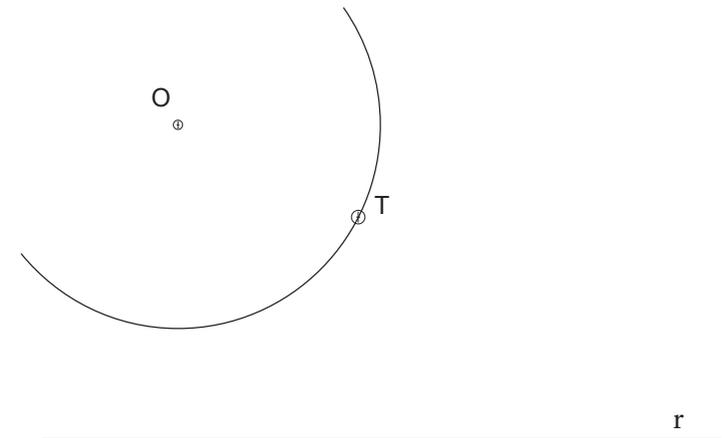
1. Se traza la recta m paralela a la r a una distancia R igual al radio dado.
2. Se traza la circunferencia d con centro en O y radio igual a la suma (o a la diferencia, según sea el caso) del radio de la circunferencia dada y el radio dado R .
3. El punto O' de intersección de la circunferencia d y la recta m es el centro del arco de enlace.
4. El punto T_1 de tangencia con la recta estará en la perpendicular a r desde O' y el punto de tangencia T_2 con la circunferencia estará en la recta que une los centros O y O' .



3.6 Enlazar una recta y un arco mediante otro arco, conocido el punto de tangencia con la circunferencia.

Dados la recta r , la circunferencia de centro O y el punto T :

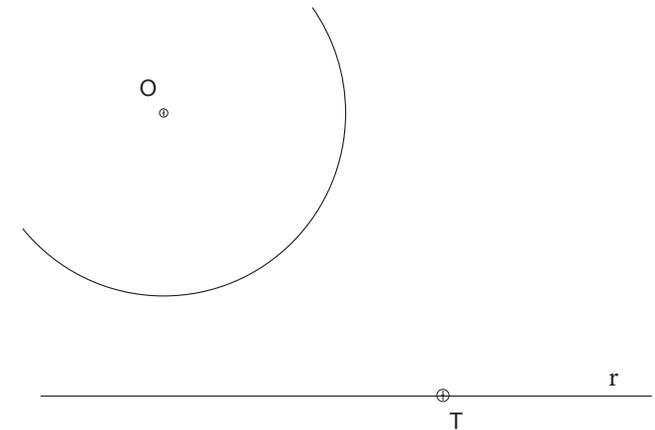
1. Por el punto T se traza la recta t tangente a la circunferencia (perpendicular al radio OT).
2. Se dibuja la bisectriz m del ángulo que forman las rectas r y t . El punto O' de intersección de m con la recta OT es el centro del arco de enlace.
3. El punto T_2 de tangencia con la recta r se halla trazando la perpendicular a la misma desde O' .



3.7 Enlazar una recta y un arco mediante otro arco, conocido el punto de tangencia con la recta.

Dados la recta r , la circunferencia de centro O y el punto T :

1. Por el punto T se traza la perpendicular p a la recta r .
2. Sobre la recta p se traslada la longitud TB igual al radio de la circunferencia de centro O .
3. Se traza la mediatriz m del segmento OB , que corta a la recta p en el punto O' , centro del arco enlace.
4. El punto T_2 de tangencia entre las dos circunferencias está en la recta OO' que une sus centros.



3.8 Enlazar varios puntos no alineados mediante arcos de circunferencia, conocido el radio de uno de los arcos.

Dados los puntos A, B, C, D, E , etc., y el radio R del arco AB :

1. Se unen los puntos A y B , trazando a continuación la mediatriz del segmento; con centro en el punto A y radio R se traza un arco que corta a la mediatriz en el punto O_1 . Con centro en el punto O_1 se traza el arco AB .
2. Se unen los puntos B y C , trazando la mediatriz del segmento, que corta a la recta O_1B en el punto O_2 . Con centro en el punto O_2 se traza el arco BC , que es tangente al anterior en B .
3. Se unen los puntos C y D , trazando la mediatriz del segmento, que corta a la recta O_1C en el punto O_3 . Con centro en O_3 se traza el arco CD , que es tangente al anterior en C , y así sucesivamente.

